Le théorème de Burnside et certaines de ses applications

22 janvier 2017

Dans tout ce qui suit, V est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Lorsque $l \in V^*$ et $x \in V$, on note $< x, l >= l(x)$ ce qui définit une application linéaire de $V \times V^* \to \mathbf{C}$.

Préliminaire : Soit W un sous-espace vectoriel de V^*, différent de V^*. Montrer que l'intersection des noyaux des éléments de W est non nulle.

1 Le théorème de Burnside

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $L(V)$. On suppose, dans tout le I, que $\mathcal{A}$ agit irréductiblement sur V, ce qui signifie que les seuls sous-espaces de V stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont V et $\{0\}$.

1.1

Soit $x \in V$, $x \neq 0$. On pose, ici et dans la suite : $V_x = \{a(x) \,|\, a \in \mathcal{A}\}$. Prouver $V_x = V$.

1.2

Soit $r = \min\{rg(a) \,|\, a \in \mathcal{A}\}$. On veut prouver $r = 1$. Raisonnant par l'absurde, on suppose : $r > 1$, et on choisit $f \in \mathcal{A}$ de rang r.

a) Justifier l'existence de $(x, y) \in V^2$ tel que $(f(x), f(y))$ soit libre.
b) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $g(f(x)) = y$.
Montrer alors que (f, fgf) est libre (dans $L(V)$.)
c) Vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par fg. En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbf{C}$ et de $u \in \mathrm{Im}(f) \setminus \{0\}$ tels que $f(g(u)) = \lambda u$.
d) Montrer : $0 < \mathrm{rg}(fgf - \lambda f) < r$. Conclure.

1.3

a) Si $\phi \in L(V)$, établir que $\mathrm{rg}(\phi) = 1$ équivaut à :

$$\exists z \in V \setminus \{0\}, \exists l \in V^* \setminus \{0\}, \forall x \in V, \ \phi(x) =< x, l > z.$$

b) Soient F un sous-espace vectoriel de V^*, $(l_1 \dots, l_p)$ une base de F. Montrer que

$$F^o = \{x \in E \mid \forall l \in F \, l(x) = 0\}$$

est l'intersection des noyaux de $l_1, \dots, l_p$ et en déduire sa dimension. Que dire si F^o est réduit à $\{0\}$?
c) Soient f_0 dans $\mathcal{A}$, de rang 1, et $(z_0, l_0) \in V \times \{V^*\}$ tels que

$$\forall x \in V, \ f_0(x) =< x, l_0 > z_0.$$

Démontrer que l'on a : $F = \{l_0 \circ a, a \in \mathcal{A}\} = \mathcal{V}^*$.
d) Etablir que $\mathcal{A}$ contient tous les endomorphismes de rang 1 de V, puis que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{V})$.

1.4

a) Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on remplace $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}$?
b) On revient aux hypothèses de départ. Soit G un sous-groupe de $GL(V)$ ne stabilisant aucun sous-espace non trivial de V. Prouver que l'on peut trouver une base de $L(V)$ formée par n^2 éléments de G, soit $(g_1 \dots, g_{n^2})$. Démontrer que l'on peut alors trouver une autre base de $L(V)$, $(g_1^*, \dots, g_{n^2}^*)$ telle que $\mathrm{Tr}(g_i g_j^*) = \delta_{i,j}$ si $1 \leq i; j \leq n^2$.

2 Un critère de finitude pour les sous-groupes de $GL(V)$

G est ici un sous-groupe de $GL(V)$ formé d'endomorphismes diagonalisables, et tel que la réunion des spectres de éléments de G soit un ensemble fini. On se propose de prouver que G est fini.

2.1

On suppose que G ne stabilise aucun sous-espace non trivial de V. En utilisant la base $(g_j^*)_{1 \leq j \leq n^2}$ de I - 4. b), montrer que G est fini.

2.2

On revient au cas général. Vérifier qu'il existe $s \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $g \in G$, $g^s = Id$.

2.3

a) Supposons que G stabilise le sous-espace non trivial X de V. Soit Y un suplémentaire de X dans Y , et p et q les projections d'images respectives associées à la décomposition : $V = X \oplus Y$. On pose : $G_X = \{p \circ g|_X\, , g \in G\}$ et $G_Y = \{q \circ g|_Y\, , g \in G\}$. Etablir que G_X et G_Y sont des sous-groupes de $Gl(X)$ et $Gl(Y)$ respectivement, puis que l'application ϕ de G vers $G_X \times G_Y$ par $g \mapsto (p \circ g|_X, q \circ g|_Y)$ est un morphisme de groupes injectif.
b) Terminer la démonstration.

3 Le théorème de Lie-Kolchin

On suppose que G est un sous-groupe de $GL(V)$ tel que $\forall g \in G\, , \mathrm{spec}(g) = \{1\}$. Montrer qu'il existe une base de trigonalisation de G (On s'inspirera des méthodes précédentes.)

4 Le théorème d'Artin-Wedderburn

Une $\mathbf{C}$-algèbre est dite *simple* si et seulement si ses seuls idéaux bilatères non triviaux sont elle-même et l'idéal nul.

4.1

Vérifier que $M_n(\mathbf{C})$ est une $\mathbf{C}$-algèbre simple.

4.2

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbf{C}$-algèbre simple de dimension finie et soit I un idéal à gauche de $\mathcal{A}$, de dimension ≥ 1 et minimale parmi les dimensions des idéaux à gauche non nuls de $\mathcal{A}$.

a) Soit, pour $a \in \mathcal{A}$, θ_a l'application $I \to I, x \mapsto ax$ (justifier). Vérifier que $\theta : \mathcal{A} \to L_{\mathbf{C}}(I)$, $a \mapsto \theta_a$ est un morphisme d'algèbres complexes.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\theta) = \{0\}$.

c) En utilisant le théorème de Burnside, prouver :

$$\mathrm{Im}(\theta) = L_{\mathbf{C}}(I).$$

4.3

Vérifier qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que A soit isomorphe à l'algèbre $M_n(\mathbf{C})$.

Cycles et crochets de Lie

Corrigé.

version corrigée

I.

1) a) D'après le théorème du rang, on a, pour tout entier i :

$$n = \dim \operatorname{Ker} u^i + \dim \operatorname{Im} u^i$$

et par ailleurs :

$$\operatorname{Ker} u^i \subset \operatorname{Ker} u^{i+1} \text{ et } \operatorname{Im} u^{i+1} \subset \operatorname{Im} u^i$$

Il en résulte immédiatement l'équivalence :

$$\operatorname{Ker} u^i = \operatorname{Ker} u^{i+1} \iff \operatorname{Im} u^i = \operatorname{Im} u^{i+1}$$

Supposons maintenant que $\operatorname{Ker} u^i = \operatorname{Ker} u^{i+1}$ et soit $x \in \operatorname{Ker} u^{i+2}$. On a donc $u^{i+2}(x) = 0$ et par suite $u(x) \in \operatorname{Ker} u^{i+1} = \operatorname{Ker} u^i$ et donc $u^{i+1}(x) = 0$. On en déduit d'abord que $\operatorname{Ker} u^{i+2} \subset \operatorname{Ker} u^{i+1}$ et donc que $\operatorname{Ker} u^{i+2} = \operatorname{Ker} u^{i+1}$ et enfin par récurrence, pour tout entier $j \geqslant i$, $\operatorname{Ker} u^j = \operatorname{Ker} u^i$. Compte tenu de la première équivalence établie dans cette question, on en déduit :

$$\forall j \geqslant i \quad \operatorname{Im} u^j = \operatorname{Im} u^i$$

b) Supposons que $\operatorname{Ker} u^i$ est différent de E. On a donc $\operatorname{Im} u^i \neq 0$. Si alors $\operatorname{Ker} u^{i+1}$ était égal à $\operatorname{Ker} u^i$, on aurait pour tout entier $j \geqslant i$ $\operatorname{Im} u^j = \operatorname{Im} u^i$ et en particulier $\operatorname{Im} u^{p+i} = \operatorname{Im} u^i$ or $u^{p+i} = u^p u^i = 0$ et donc $\operatorname{Im} u^{p+i} = (0) = \operatorname{Im} u^i$. Ce qui est impossible. Il en résulte bien que si $\operatorname{Ker} u^i$ est différent de E, il est aussi différent de $\operatorname{Ker} u^{i+1}$.

c) Il résulte de la question précédente, compte tenu du fait que pour $i < p$, $u^i \neq 0$, que pour $i < p$ $\operatorname{Ker} u^i \neq E$ et donc $\operatorname{Ker} u^i \neq \operatorname{Ker} u^{i+1}$. La dimension du noyau de u^i croit dont strictement avec i sur l'intervalle $[0, p]$. Il en résulte que pour tout $i \leqslant p$, on a $\dim \operatorname{Ker} u^i \geqslant i$ et donc $p \leqslant n$ et par suite $u^n = 0$.

Si $p = n$, on a :

$$0 = \dim \operatorname{Ker} u^0 < \dim \operatorname{Ker} u < \dim \operatorname{Ker} u^2 < \ldots < \dim \operatorname{Ker} u^{n-1} < \dim \operatorname{Ker} u^n = n$$

et donc :

$$\forall i \leqslant n \quad \dim \operatorname{Ker} u^i = i$$

2) a) On a $n - h \geqslant 1$ et donc $u^h \neq 0$ et d'autre part :

$$0 = \dim \operatorname{Ker} u^0 < \dim \operatorname{Ker} u < \dim \operatorname{Ker} u^2 < \ldots < \dim \operatorname{Ker} u^h = h$$

Donc pour $j \leqslant h$, $\dim \operatorname{Ker} u^j = j$ et le rang de u^j est $n - j$.

b) Le théorème du rang appliqué à la restriction de u à l'espace $\operatorname{Im} u^i$ donne :

$$\dim \operatorname{Im} u^i = \dim \operatorname{Im} u^{i+1} + \dim (\operatorname{Im} u^i \cap \operatorname{Ker} u)$$

c) D'après le a), on sait que la rang de u est $n-1$ et par suite, la dimension de $\operatorname{Ker} u$ est 1. On a donc pour tout i, $\dim (\operatorname{Im} u^i \cap \operatorname{Ker} u) \leqslant 1$. Si $\operatorname{Im} u^i \cap \operatorname{Ker} u = 0$, alors, d'après le b), $\operatorname{Im} u^i = \operatorname{Im} u^{i+1} = \ldots = \operatorname{Im} u^n = 0$ et donc $i \geqslant p$, si p est l'indice de nilpotence de u. Pour $i < p$ on a donc $\dim(u^i \cap \operatorname{Ker} u) = 1$ et $\dim \operatorname{Im} u^i = \dim \operatorname{Im} u^{i+1} + 1$. Comme $\dim \operatorname{Im} u = n - 1$, on en déduit par récurrence sur i que pour $i < p$, $\dim \operatorname{Im} u^{i+1} = \dim \operatorname{Im} u^i - 1 = n - (i+1)$. On a donc $\dim \operatorname{Im} u^p = n - p = 0$ et par suite $n = p$. L'indice de nilpotence de u est n.

3) a) Notons d'abord que u étant de rang $n-1$, son indice de nilpotence est n et on a pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant r$, $\dim \operatorname{Ker} u^j = j$. u étant nilpotent, v l'est aussi et donc $\dim \operatorname{Ker} u \geqslant 1$. Par ailleurs $\operatorname{Ker} v = F \cap \operatorname{Ker} u$ et donc $\dim \operatorname{Ker} v \leqslant \dim \operatorname{Ker} u = 1$ et donc $\dim \operatorname{Ker} v = 1$.On peut donc appliquer les résultats précédents à v endomorphisme nilpotent de F de rang $r-1$ où r est la dimension de F. On a donc :

$$\forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant r,\ \ \dim \operatorname{Ker} v^j = j = \dim \operatorname{Ker} u^j$$

comme par ailleurs $\operatorname{Ker} v^j \subset \operatorname{Ker} u^j$,

$$\forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant r,\ \ \operatorname{Ker} v^j = \operatorname{Ker} u^j$$

et en particulier :

$$F = \operatorname{Ker} u^r = \operatorname{Ker} v^r$$

b) Il résulte de la question précédente que les sous-espaces de E stables par u sont de la forme $\operatorname{Ker} u^r$; comme par ailleurs de tels sous-espaces sont stables par u : les sous-espaces vectoriels de E stables par u sont exactement les espaces $\operatorname{Ker} u^r$ pour $0 \leqslant r \leqslant n$.

4) a) Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ des réels tels que :

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \lambda_i u^i(x) = 0$$

En prenant l'image du premier membre successivement par u^{n-1} puis par u^{n-2} jusqu'à u^0, et compte tenu du fait que $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^k(x) = 0$ pour $k \geqslant n$, on obtient successivement $\lambda_0 = 0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1}$. Les vecteurs $u^k(x)$ pour k variant de 0 à $n-1$ forment donc un système libre de n vecteurs donc une base de E.

b) Notons d'abord que si $f \in E^*$ on a

$$({}^t u)^2(f) ={}^t u(f \circ u) = (f \circ u) \circ u = f \circ u^2$$

Par récurrence sur i on en déduit :

$$\forall i \geqslant 0 \quad ({}^t u)^i(f) = f \circ u^i \quad \text{et} \quad {}^t(u^i) = ({}^t u)^i$$

Pour $i \geqslant p$ ${}^t u^i(f) = 0$, l'endomorphisme ${}^t u$ de E^* est donc nilpotent et son indice de nilpotence est $\leqslant p$. Montrons que cet indice de nilpotence est p. Comme f n'est pas orthogonal à $u^{p-1}(x)$, $< u^{p-1}(x), f >= f(u^{p-1}(x)) \neq 0$. On en déduit d'abord que $f \circ u^{p-1} \neq 0$ et donc que ${}^t u^{p-1}(f) \neq 0$ soit ${}^t u^{p-1} \neq 0$ et enfin que l'indice de ${}^t u$ est p.

De la question précédente appliquée à l'endomorphisme ${}^t u$ et au vecteur f, on déduit que les vecteurs ${}^t u^i(f)$ pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$ forment un système libre dans E^* et la dimension de H' est donc p. La dimension de son orthogonal H est donc $n-p$.

c) Notons d'abord que si w est un endomorphisme de E, $g \in E^*$ et $y \in E$ alors :

$$< y,{}^t w(g) >={}^t w(g)(y) = (g \circ w)(y) = g(w(y)) =< w(y), g >$$

Soit $y \in H$. ${}^t u^{i+1}(f)$ est un élément de H' et est donc orthogonal à y il en résulte :

$$\forall i,\ 0 \leqslant i \leqslant p-1,\ < u(y),{}^t u^i(f) >=< y,{}^t u^{i+1}(f) >= 0$$

Donc $u(y)$ est orthogonal à tous les éléments de H' et donc est élément de l'orthogonal de H' qui est H. On a ainsi prouvé que $u(H) \subset H$, c'est à dire que H est stable par u.

G est de dimension p et H est de dimension $n-p$, donc pour démontrer que E est somme directe de G et H, il suffit de démontrer que $G \cap H = (o)$.

Soit $y \in G \cap H$. Il existe des réels a_k tels que :

$$y = \sum_{0 \leqslant k \leqslant p-1} a_k u^k(x)$$

Montrons que les a_k sont nuls.

On a $u^{p-1}(y) = a_0 u^{p-1}(x)$ et $u^{p-1}(y)$ est élément de H et est donc orthogonal à f ainsi :

$$< y, {}^t u^{p-1}(f) > = < u^{p-1}(y), f > = 0 = a_0 < u^{p-1}(x), f >$$

Et comme, par hypothèse, f n'est pas orthogonal à $u^{p-1}(x)$ on en déduit que a_0 est nul.

Pour démontrer que a_1 est nul, on recommence un raisonnement analogue en écrivant que $u^{p-2}(y) = a_1 u^{p-1}(x)$ et ainsi de suite par récurrence on démontre que tous les a_k sont nuls et donc que y est nul. On a donc $E = G \oplus H$.

d) On démontre le résultat par récurrence sur la dimension n de E. On peut supposer dans cette question $n \geqslant 1$ bien que dans l'énoncé on suppose $n \geqslant 2$. Si $n = 1$ tout endomorphisme nilpotent est nul et le résultat à démontrer est trivial. Supposons $n \geqslant 2$ et que le résultat est établi pour un espace de dimension strictement inférieure à n. Soit u un endomorphisme nilpotent. Si son indice de nilpotence est $p > 1$, on a d'après la question précédente $E = G \oplus H$ avec G qui est stable par u et la restriction v de u à G est d'indice p. On applique alors l'hypothèse de récurrence à H, dont la dimension est strictement inférieure à celle de E, et à l'endomorphisme w restriction de u à H dont on a vu qu'il était bien stable par u. H est alors somme directe de sous-espaces stables par w, et donc par u et dont la dimension est égale à l'indice de nilpotence de la restriction à ces sous-espaces de w donc de u et en ajoutant G, on obtient bien pour E une décomposition du type souhaité. Si $p = 0$ c'est à dire si u=0, on peut encore écrire E comme somme directe de n droites vectorielles qui sont évidemment stables par u, les restrictions de u à ces droites étant d'indice 1.

II.

1) a) On a :

$$[u, vw] = uvw - vwu = (uv - vu)w + v(uw - wu) = [u, v]w + v[u, w]$$

Supposons d'abord que $P = X^k$ et démontrons le résultat par récurrence sur k. Pour $k = 0$:

$$[a, b^0] = a - a = 0 = \alpha b P'(b)$$

Supposons que pour $k \geqslant 1$ et $P = X^k$:

$$[a, P(b)] = [a, b^k] = \alpha b P'(b) = k\alpha b^k$$

Alors si $P = X^{k+1}$:

$$[a, P(b)] = [a, b^{k+1}] = [a, bb^k] = [a, b]b^k + b[a, b^k] = [a, b]b^k + k\alpha b^{k+1} = (k+1)\alpha b^{k+1} = \alpha b P'(b)$$

On a ainsi démontré que pour tout polynôme P de la forme $P = X^k$, on a :

$$[a, P(b)] = \alpha b P'(b)]$$

Comme les deux membres de cette égalité dépendent linéairement de P, cette égalité reste valable pour tout polynôme P.

De l'égalité précédente on déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; ab^k - b^k a = k\alpha b^k \quad \text{et} \quad b^k a = ab^k - k\alpha b^k$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} b^k$, on a :

$$b^k(a(x)) = a(b^k(x)) - ka(b^k(x)) = 0$$

et donc $a(x) \in \operatorname{Ker} b^k$. Ce qui prouve que $\operatorname{Ker} b^k$ est stable par a.

b) L'espace $\mathcal{L}(E)$ étant de dimension finie n^2, les n^2+1 vecteurs $b^0, b, b^2, \ldots, b^{n^2}$ forment un système lié et donc il existe un polynôme non nul de degré minimum P_0 tel que $P_0(b) = 0$ [1].

Considérons le polynôme $Q = dP_0 - XP_0'$. De la relation démontrée au b, il résulte immédiatement que $bP_0'(b) = 0$ et donc $Q(b) = 0$. Or le polynôme Q est de degré strictement inférieur à d et donc il est nul. Le polynôme P_0 peut s'écrire sous la forme $P_0 = a_1X^d + R$ où le degré de R est strictement inférieur à d. On a alors : $Q = 0 = dR - XR'$ et en examinant le terme de plus haut degré de $dR - XR'$ on voit que le polynôme R de degré strictement inférieur à d est nécessairement nul.On a donc $P_0 = a_1X^d$ avec $a_1 \neq 0$. On a donc $b^d = 0$ et b est nilpotent [2].

2) a) b est un endmorphisme nilpotent de E de rang $n-1$, donc d'après le I 1) et 2), l'indice de nilpotence de b est n et pour tout $k \leqslant n$ la dimension de $\operatorname{Ker} b^k$ est k.

En particulier la dimension de $\operatorname{Ker} u^{n-1}$ est $n-1$ et le rang de b^{n-1} est 1.

Il existe donc un vecteur x non nul de E tel que $b^{n-1}(x) \neq 0$. Posons alors :

$$\forall k \in [1,n] \quad x_k = b_{n-k}(x)$$

D'après la question I 4 a) les vecteurs x_k forment une famille libre et :

$$\forall k \in [1,n] \ \forall i \in [1,k] \quad b^k(x_i) = b^{n+k-i}(x) = 0$$

La famille $x_1, \ldots, x_k$ est donc, pour tout k une base de $\operatorname{Ker} b^k$.

b) $\operatorname{Ker} b$ est de dimension 1 et x_1 constitue donc une base de $\operatorname{Ker} b$. Par ailleurs on a $ab - ba = \alpha b$ et donc $b(a(x_1)) = a(b(x_1)) - \alpha b(x_1) = 0$. le vecteur $a(x_1)$ appartient donc au noyau de b dont x_1 est une base. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a(x_1) = \lambda x_1$. Donc x_1 est vecteur propre de a et λ est la valeur propre associée.

On a :

$$a(x_k) = ab^{n-k}(x) = b^{n-k}a(x) + \alpha(n-k)b^{n-k}(x)$$

Puisque b est nilpotent le dernier membre écrit est élément de $\operatorname{Ker} b^k$. La matrice de a dans la base $(x_1, \ldots, x_k$'est donc triangulaire supérieure.Appelons λ_k l'élémént de cette matrice située sur la kème ligne et kème colonne. On a $\lambda_1 = \lambda$. Posons :

$$\forall k \in [1,n] \quad a(x_k) = \lambda_k x_k + y_{k-1}$$

où y_k est un vecteur de $\operatorname{Ker} b^{k-1}$. On a :

$$a(x_k) = ab(x_{k+1}) = ba(x_{k+1}) + \alpha b(x_{k+1}) = ba(x_{k+1}) + \alpha x_k$$

donc

$$a(x_k) = \lambda_k x_k + y_{k-1} = ba(x_{k+1}) + \alpha x_k$$

Par ailleurs, pour $k \leqslant n-1$, $a(x_{k+1}) = \lambda_{k+1}x_{k+1} + y_k$ et $ba(x_{k+1}) = \lambda_{k+1}x_k + b(y_k)$. On en déduit :

$$a(x_k) = \lambda_k x_k + y_{k-1} = \lambda_{k+1}x_k + b(y_k) + \alpha x_k$$

et donc :

$$(\lambda_k - \lambda_{k+1} - \alpha)x_k = y_{k-1} + b(y_k) \in \operatorname{Ker} b^{k-1}$$

---

1. Pour les gens savants et notamment les $\frac{5}{2}$ on peut prendre pour P_0 le polynôme minimal de b et si d'ailleurs on impose à P_0 d'avoir 1 comme coefficient directeur, P_0 est nécessairement égal au polynôme minimal de b.

2. Outre la solution suggérée par l'auteur on pouvait remarquer que l'égalité : $\forall k \in \mathbb{N}^* : ab^k - b^k a = k\alpha b^k$ il résulte que si $b^k \neq 0$ alors b^k est vecteur propre de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui à $u \in \mathcal{L}(E)$ associe $au - ua$, et la valeur propre associée est $k\alpha$. Or un tel endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres distinctes et donc il existe k tel que $b^k = 0$.

et comme $x_k \notin \operatorname{Ker} b^{k-1}$, on en déduit :

$$\lambda_k - \lambda_{k+1} - \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k - \alpha$$

Comme $\lambda_1 = \lambda$ on en déduit que :

$$\forall k \in [1, n] \;\; \lambda_k = \lambda - (k-1)\alpha$$

Les λ_k sont les valeurs propres de a et en particulier $\lambda - (n-1)\alpha$ est valeur propre de a.
La forme de la matrice de a dans la base $x_1, \ldots, x_k$ est donc :

$$\begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda - \alpha & a_{23} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda - (k-1)\alpha & a_{kk+1} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda - (n-1)\alpha \end{pmatrix}$$

c) Soit x un vecteur propre de a associé à la valeur propre μ. On a :

$$a(b(x)) = b(a(x)) + \alpha b(x) = (\mu + \alpha) b(x)$$

De sorte que si $b(x) \neq 0$, $b(x)$ est vecteur propre de a associé à la valeur propre $\mu + \alpha$.

d) a admet n valeurs propres distinctes $\lambda - k\alpha$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. La forme de la matrice de a par rapport à la base $x_1, \ldots, x_k$ montre que les sous-espaces $\operatorname{Ker} b^k$ contiennent tous les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda - i\alpha$ pour $i \leqslant k-1$. Le vecteur propre e_n correspondant à la valeur propre $\lambda - (n-1)\alpha$ ne peut donc pas appartenir à $\operatorname{Ker} b^{n-1}$ qui contient déjà les vecteurs propres correspondant à toutes les autres valeurs propres. On a donc :

$$b^{n-1}(e_n) \neq 0$$

On peut donc appliquer ce qui a été fait au 2 a). Les vecteurs $e_k = b^{n-k}(e_n)$ forment donc une base de E et pour tout $k \geqslant 2$, $b(e_k) = e_{k-1}$. On a :

$$a(e_{n-1}) = ab(e_n) = ba(e_n) + \alpha b(e_n) = (\lambda - (n-1)\alpha e_{n-1} + \alpha e_{n-1} = (\lambda - (n-2)\alpha) e_{n-1}$$

et on démontrer par récurrence descendante que :

$$\forall k \in [1, k] \; a(e_k) = (\lambda - (k-1)\alpha) e_k$$

La base $e_1, \ldots, e_n$ diagonalise donc a et la matrice de a par rapport à cette base est :

$$diagonale(\lambda, \lambda - \alpha, \ldots, \lambda - (n-1)\alpha)$$

La matrice B de b par rapport à cette base a tous ses éléments nuls sauf ceux qui sont situés au-dessus de la diagonale principale qui sont égaux à 1 c'est à dire :

$$B = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

III.

1) On a :

$$(\alpha + \beta)[b, c] = \alpha[b, c] + \beta[b, c] = [\alpha b, c] + [b, \beta c] =$$

$$= abc - bac - cab + cba + bac - bca - acb + cab = a[b,c] - [b,c]a = a^2 - a^2 = 0$$

et comme $[b,c] = a \neq 0$, on en déduit que $\beta = -\alpha$.

2) a) La somme des valeurs propres de a est la trace de a et d'après le II 2, on a :

$$\operatorname{tr} a = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (\lambda - k\alpha) = n\lambda - \frac{n(n-1)}{2}\alpha$$

Par ailleurs $a = bc - cb$ et donc $\operatorname{tr} a = 0$ et donc

$$\lambda = \frac{n-1}{2}\alpha$$

Les valeurs propres de a sont donc :

$$\lambda_k = \frac{n-2k+1}{2}\alpha \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

On constate que $\lambda_k = 0$ si et seulement si $k = \dfrac{n-1}{2}$ et donc si n est pair, 0 n'est pas valeur propre de a et donc le rang de a est n. Si n est impair, 0 est valeur propre simple de a, le noyau de a est donc de dimension 1 et a est de rang $n-1$.

b) Les valeurs propres de a étant simples les sous-espaces propres sont de dimension 1. Soit e_k un vecteur propre associé à λ_k, on a :

$$[a,c](e_k) = -\alpha c(e_k) = (ac - ca)(e_k) = ac(e_k) - \lambda_k c(e_k)$$

et donc :

$$a(c(e_k)) = (\lambda_k - \alpha)c(e_k)$$

ce qui signifie que si $c(e_k) \neq 0$), alors c'est un vecteur propre associé à $(\lambda_k - \alpha) = \lambda_{k+1}$. En conclusion :

$$\forall k \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \exists \mu_k \quad c(e_k) = \mu_k e_{k+1}$$

Pour déterminer μ_k,nous utilisons : $[b,c] = a$. Donc pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et en convenant que $e_{-1} = 0$,

$$bc(e_k) - cb(e_k) = a(e_k)$$

soit

$$\mu_k b(e_{k+1}) - c(e_{k-1}) = \lambda_k e_k$$

$$(\mu_k - \mu_{k-1})e_k = \lambda_k e_k$$

On en déduit que $\mu_k = \lambda_k + \mu_{k-1}$ et comme $\mu_1 = \lambda_1$:

$$\forall k \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1 \quad \mu_k = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \lambda_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \alpha\frac{n-2i+1}{2} = \alpha\frac{k(n-k)}{2}$$

Les matrices A, B, C de a, b, c par rapport à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \mu_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall k 1 \leqslant k \leqslant n \quad \lambda_k = \frac{n-2k+1}{2}\alpha$$

et

$$\forall k \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1 \quad \mu_k = \frac{k(n-k)}{2}\alpha$$

On suppose maintenant que a, b, c sont des endomorphismes dont les matrices par rapport à une certaine base $(e_1, \dots e_n)$. Pour montrer qu'ils vérifient les conditions données au début du III, il suffit d'examiner comment sont transformés les vecteurs de base. Par exemple (en convenant que $e_{-1} = 0$:

$$[A, B](e_k] = AB(e_k) - BA(e_k) = (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = \alpha e_{k-1} = \alpha B(e_k)$$

et donc :

$$[A, B] = \alpha B$$

Les autres relations se démontrent de la même façon.

Les μ_k étant non nuls le rang de c est $n-1$.

c) Soit F un sous-espace vectoriel de E non nul et stable par a, b et c. Les endomorphismes b et c étant nilpotents et de rang $n-1$ et laissant F stable, on a, si k est la dimension de F, $F = \operatorname{Ker} b^k = \operatorname{Ker} c^k$. Or avec les notations de la question précédente une base de $\operatorname{Ker} b^k$ est $e_1, \dots, e_k$ et une base de $\operatorname{Ker} c^k$ est $e_{n+1-k}, \dots, E_n$. On a donc nécessairement $k = n$ et $F = E$.

On a ainsi démontré que les seuls sous-espaces de E stables par a, b et c sont $\{0\}$ et E.

3) a)

Démontrons la formule proposée par récurence sur i. Pour $i = 1$, elle s'écrit :

$$[b, c] = \cancel{\alpha} I$$

Supposons la vérifiée pour l'entier i. On a alors :

$$[b, c^{i+1}] = [b, c^i c] = [b, c^i]c + c^i[b, c] = ic^{i-1}(a - (i-1)I)c + c^i a =$$

$$= ic^{i-1}ac - i(i-1)c^i + c^i a = ic^{i-1}(ac - ca + ca) - i(i-1)c^i + c^i a =$$

$$= ic^{i-1}(-2c + ca) - i(i-1)c^i + c^i a = -2ic^i + (i+1)c^i a - i(i-1)c^i = (i+1)c^i(a - iI)$$

et la formule annoncée est ainsi démontrée.

Nous avons déjà remarqué que c est nilpotent, soit alors $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $c^p = 0$ et $c^{p-1} \neq 0$. On a alors $[b, c^p] = 0$ et donc $c^{p-1}(a - (p-1)I) = 0$ et comme $c^{p-1} \neq 0$ alors $a - (p-1)I$ est nécessairement non inversible. Ce qui signifie que $p - 1$ est valeur propre de a.

b) Soit λ la plus grande valeur propre de a et x un vecteur propre associé. Soit F le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $c^k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$. F est non nul (puisqu'il contient x) et est stable par c. Montrons qu'il est stable par a et b.

D'après le II 1°b) et compte tenu de $[a, c] = -2c$, on a pour tout entier k :

$$ac^k(x) = c^k a(x) - 2kc^k(x) = (\lambda - 2k)c^k(x)$$

donc F est stable par a et les vecteurs $c^k(x)$ sont soit nuls soit vecteurs propres de a.

De $[a, b] = 2b$, on déduit que $ab(x) = (\lambda + 2)b(x)$. Or d'après le choix de λ, $\lambda + 2$ ne peut pas être valeur propre de a et donc $b(x) = 0$.

De la question précédente on déduit, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$bc^k(x) = kc^{k-1}(a(x) - (k-1)x) = k(\lambda - (k-1))c^{k-1}(x)$$

ce qui prouve que $bc^k(x) \in F$ et compte tenu de $b(x) = 0$, F est stable par b.

Finalement F est non nul et stable à la fois par a, b et c il est donc égal à E et les vecteurs $c^k(x)$ engendrent E. Si on appelle r le plus petit entier non nul tel que $(x, c(x), \dots, e^{r-1}(x))$ forme un système libre. Ce sera une base de E et donc $r = n$. Cette base diagonalise a et donc a est diagonalisable et c est de rang $n-1$. On déduit alors du III 2° en échangeant les rôles de b et c que b est également de rang $n-1$.